Corrigé

1. Graphiquement, on conjecture que la fonction est concave.
2. Une équation de la tangente au point d'abscisse 5 est de la forme : $y = f'(1) \times (x - 1) + f(1)$. Or, $f(1) = \sqrt{1} = 1$ et $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ donc $f'(1) = \dfrac{1}{2}$. Une équation de cette tangente est donc $y = \dfrac{1}{2}(x-1) + 1$ soit $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$.
3. Comme f est concave, sa courbe représentative est sous toutes ses tangentes, on en déduit que, pour tout x de $[0; +\infty[$, on a $\sqrt{x} \leqslant \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$.
4. En appliquant le résultat précédent à $x = 2$, on obtient $\sqrt{2} \leqslant \dfrac{1}{2} \times 2 + \dfrac{1}{2}$ soit $\sqrt{2} \leqslant 1,5$.